



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

délivré par **l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**

Spécialité : Intelligence Artificielle

Présentée et soutenue par **Sylvain Bouveret**

Le 16 novembre 2007

**Allocation et partage équitables de ressources indivisibles :
modélisation, complexité et algorithmique**

JURY

M. Christian Bessière, président du jury
M. Ulle Endriss
M. Thibault Gajdos
M. Jean-Michel Lachiver, co-directeur de thèse
M. Jérôme Lang, co-directeur de thèse
M. Michel Lemaître, co-directeur de thèse
M. Patrice Perny, rapporteur,
M. Thomas Schiex

École doctorale	:	mathématiques, informatique et télécommunications de Toulouse
Unité de recherche	:	équipe d'accueil SUPAERO-ONERA MOIS (ONERA-DCSD, centre de Toulouse) - IRIT - CNES
Rapporteurs	:	M. Boi Faltings et M. Patrice Perny
Directeurs de thèse	:	M. Jean-Michel Lachiver, M. Jérôme Lang et M. Michel Lemaître

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail de thèse. Ils ont le droit à ma reconnaissance et à un exemplaire gratuit de ce manuscrit s'ils le souhaitent. Je tiens toutefois à adresser quelques remerciements particuliers aux personnes qui seront citées dans les deux pages suivantes, et qui m'ont très certainement apporté autant sur le plan technique que sur le plan humain.

En premier lieu, je tire un coup de chapeau à Jean-Michel Lachiver, Jérôme Lang et Michel Lemaître, qui m'ont encadré pendant ces trois années. Ils ont su m'apporter, par leur relative disponibilité, leurs différences, et leurs qualités techniques et humaines, tous les ingrédients nécessaires à la réalisation d'un travail de thèse dans des conditions excellentes. J'espère avoir encore moult occasions de les côtoyer, que ce soit pour une discussion technique, à l'autre bout du monde, ou encore au détour d'un chemin ou d'une falaise.

Simon de Giroy, Thomas Schiex et Gérard Verfaillie ont eu l'occasion de suivre mon travail de près à l'occasion en particulier de leur participation à mon comité de thèse, même si leur influence sur ce travail dépasse largement ce cadre restreint. Je les en remercie vivement ! Merci particulièrement à Thomas Schiex d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Merci infiniment aux Professeurs Boi Faltings et Patrice Perny, qui ont eu la lourde tâche probablement quelque peu fastidieuse d'être les rapporteurs du présent manuscrit. J'ai eu plaisir à discuter avec eux, à l'occasion de multiples rencontres, et leurs conseils m'ont été très utiles pour améliorer ce manuscrit ainsi que pour la suite de mon travail. J'aimerais remercier en outre Patrice Perny pour m'avoir accueilli dans son équipe au Laboratoire d'Informatique de Paris 6 pendant deux semaines.

Je remercie Christian Bessière, Ulla Endriss et Thibault Gajdos, membres de mon éclectique jury de thèse, pour la qualité de leur analyse, la précision de leurs questions et la pertinence de leurs conseils lors de la soutenance. Merci à Christian Bessière d'avoir accepté de présider le jury. Merci à Thibault Gajdos d'avoir accepté de s'aventurer sur les terres inconnues de l'informatique en participant à mon jury de thèse. Je remercie enfin chaleureusement Ulla Endriss, pour avoir lu le manuscrit avec autant d'attention, pour toutes les discussions que nous avons pu avoir au cours de ma thèse, pour l'énergie qu'il déploie à organiser des événements fédérateurs dans la communauté, et pour m'avoir donné l'occasion de participer à de nombreuses reprises à des groupes de travail.

J'ai effectué ma thèse au sein de l'équipe Conduite et Décision du Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol de l'Onera, où j'ai bénéficié de conditions de travail particulièrement agréables. J'aimerais donc remercier Patrick Fabiani et Jean-François Gabard de m'avoir accueilli dans cette équipe, ainsi que tous les membres de l'unité dont j'ai apprécié la compagnie. Merci à Christophe "Tof" Garion, de Supaéro, de m'avoir fait confiance et de m'avoir fait découvrir le monde merveilleux de Java et de l'enseignement. Merci aussi à tous les personnels (techniques, administratifs, gardes, etc.) qui nous facilitent la tâche au quotidien et contribuent à nous rendre le travail plus agréable.

D'un point de vue plus pragmatique, je remercie le Cnos et l'Onera d'avoir financé cette thèse. Je remercie aussi l'ANR pour le financement des missions dont j'ai pu bénéficier à plusieurs reprises au cours de ma thèse, dans le cadre de ma participation au projet Phac.

Outre les personnes que j'ai déjà citées dans les paragraphes précédents, j'ai eu la chance de faire de multiples connaissances durant ma thèse, au détour de groupes de travail, de conférences ou de séminaires. Je pense tout d'abord à toutes les personnes qui gravitent autour du groupe *MultiAgent Resource Allocation* et du projet *AcR Phac*, et en particulier les gens du *Lamsade* dont Yann Chevaleyre, Sylvia Estivie et Nicolas Maudet, du *Cril*, de l'*ILC*, et du *Lip6*. Je remercie à cette occasion particulièrement l'équipe *Décision* du *Lip6*, qui m'a accueilli chaleureusement pendant deux semaines, et notamment (outre Patrice Perny que j'ai déjà cité), Olivier Spanjaard, Paul Weng, et la joyeuse équipe des thésards, Lucie, Nicolas, et les autres. Merci aussi à Bruno Zanuttini pour toutes nos discussions communes, pour ses qualités humaines, et pour son invitation à l'Université de Caen.

Merci à la meute des thésards toulousains, parmi lesquels :

- ▷ les thésards du *DCD* et assimilés : Clément et ses sandales, Cédric et son professeur émérite K. Hungus, l'autre Cédric, Nico, Greg le millionnaire, Greg le prolétaire, Manu tentionnaire, Charles, Olivier, Flo, Stéphane, Julien, Patrice, Sophie, Florent et les autres ;
- ▷ les piliers du *DMAE* : Claire et sa polaire frottée, Bruno, inventeur du cadeau concept et de la loi de Frackowiak, Nico ;
- ▷ la horde de l'*Trit* : Elise, Kevin, Nico ;
- ▷ les joyeux drilles de l'*Inra* : Matthias, dont l'activité principale consiste à compiler le *C* ;
- ▷ les autres : rajoutez votre nom ici si je vous ai oublié :

Merci à Barth de m'avoir hébergé tant de fois lorsque j'étais en mission. Merci aux membres de la confrérie *Saint-Luc*, issus d'une longue lignée de maîtres brasseurs depuis 2007. Merci aux amis proches et moins proches, aux grimpeurs, aux nageurs, aux cinéphiles, aux cynophiles, aux amateurs de bovins, aux skieurs, aux randonneurs, aux chercheurs, aux étudiants, aux coureurs, aux piliers de comptoir, aux adeptes du jeu de mots, aux geeks, aux mélomanes, aux ours des montagnes, . . .

Merci à tous les professeurs qui m'ont donné l'envie d'apprendre, la curiosité intellectuelle, et le goût de la recherche.

Merci à ma mère de m'avoir soutenu et donné l'opportunité de faire des études.

Merci enfin à Marianne, pour tout le reste, tout ce qui compte réellement.

Je dédie cette thèse à Alice, née le 26 janvier 2006.

Table des matières

Notations	1
Introduction	5
I Modélisation	13
1 Partage et décision collective	15
1.1 La ressource	15
1.1.1 La nature de la ressource	15
1.1.2 Les contraintes d'admissibilité	18
1.2 La notion de préférences	20
1.2.1 Modélisation des préférences	20
1.2.1.1 Relations binaires	20
1.2.1.2 Structure de préférence ordinale	22
1.2.1.3 Extensions de la structure de préférence ordinale	23
1.2.2 L'espace cible des préférences individuelles	26
1.3 Agrégation des préférences et partage équitable	27
1.3.1 Principes normatifs de la justice distributive	27
1.3.1.1 Le principe d'équité	27
1.3.1.2 Le <i>welfarisme</i> cardinal	28
1.3.1.3 L'absence d'envie	31
1.3.2 Ordre de bien-être social et fonction d'utilité collective	32
1.3.3 Propriétés des ordres de bien-être collectif et des partages optimaux	33
1.3.3.1 Propriétés basiques	33
1.3.3.2 Partage et équité	34
1.3.3.3 Résumé de l'ensemble des propriétés	40
1.3.4 Fonctions d'utilité collective classiques	41
1.3.4.1 Fonction d'utilité collective utilitariste classique	41
1.3.4.2 Fonction de Nash	43

1.3.4.3	Somme des puissances	43
1.3.4.4	Moyennes pondérées ordonnées (OWA)	45
1.3.4.5	Normalisation des utilités	47
1.4	Distribution ou répétition dans le temps de la procédure d'allocation	48
1.4.1	Partage centralisé ou distribué	48
1.4.2	Répétition dans le temps du problème d'allocation	50
1.5	Conclusion	51
2	Droits exogènes	53
2.1	Exemples repères	55
2.1.1	Avec des droits égaux	55
2.1.2	Avec des droits inégaux	56
2.2	Le principe de duplication des agents	56
2.3	Propriétés des ordres sociaux et partages optimaux	59
2.3.1	Extension des propriétés basiques classiques	59
2.3.2	Équité en présence de droits exogènes inégaux	60
2.3.2.1	Juste part et absence d'envie	61
2.3.2.2	Équité fondée sur l'égalitarisme et droits inégaux	62
2.3.3	Nouvelles propriétés relatives aux droits exogènes	68
2.3.4	Application aux quatre ordres de bien-être social étendus	70
2.4	Fonctions d'utilité collective de compromis et droits inégaux	70
2.4.1	Fonctions somme des puissances	70
2.4.2	Moyennes Pondérées Ordonnées Étendues	73
2.5	Applications	74
2.6	Droits inégaux ordinaux	76
2.6.1	Méthode forte	76
2.6.2	Méthode faible	77
2.7	Conclusion sur les droits exogènes inégaux	78
II	Représentation compacte et complexité	79
3	Représentation compacte	81
3.1	Représentation compacte de l'espace des alternatives	83
3.1.1	Cadre formel	83
3.1.1.1	Espace d'alternatives combinatoires	83
3.1.1.2	Application au partage : espace des allocations	84
3.1.1.3	La représentation compacte	84
3.1.2	Réseaux de contraintes	85

3.1.3	Variables de décision binaires	86
3.1.3.1	Représentation logique	86
3.1.3.2	Application à l'espace des allocations	88
3.1.3.3	Représentation binaire de variables n -aires	88
3.1.3.4	Représentation logique et compilation de connaissances	88
3.2	Représentation compacte de préférences	91
3.2.1	Cadre formel	91
3.2.1.1	Langage de représentation compacte de préférences	91
3.2.1.2	Application au partage : espace combinatoire d'objets	92
3.2.1.3	La représentation compacte de préférences	93
3.2.2	Modélisation à base de logique	94
3.2.2.1	Préférences dichotomiques	95
3.2.2.2	Préférences ordinales	95
3.2.2.3	Préférences cardinales	97
3.2.3	Préférences <i>ceteris paribus</i> et <i>CP-nets</i>	99
3.2.3.1	Préférences <i>ceteris paribus</i>	99
3.2.3.2	<i>CP-nets</i>	100
3.2.3.3	Application au problème de partage	103
3.2.4	Préférences additives généralisées	104
3.2.4.1	Langages de lots k -additifs	104
3.2.4.2	Indépendance additive généralisée, <i>GAI-nets</i> et <i>CSP</i> valués	105
3.2.5	Langages d'enchères combinatoires	109
3.2.5.1	Langages <i>OR</i> et <i>XOR</i>	109
3.2.5.2	Combiner les langages <i>OR</i> et <i>XOR</i>	111
3.2.5.3	Langages logiques pour les enchères combinatoires	112
3.2.6	Conclusion sur les langages de représentation de préférences	113
3.3	Représentation compacte des problèmes de partage équitable	113
3.3.1	Pareto-efficacité et absence d'envie en présence de préférences dichotomiques : représentation logique	115
3.3.1.1	Absence d'envie	117
3.3.1.2	Partages efficaces	118
3.3.1.3	Partages efficaces et sans-envie	119
3.3.1.4	Conclusion sur le problème avec préférences dichotomiques	120
3.3.2	Un langage générique pour le problème de partage de biens indivisibles	121
3.3.2.1	Contraintes	121
3.3.2.2	Demandes pondérées et préférences individuelles	122
3.3.2.3	Utilité collective	123
3.3.2.4	Problème de partage de biens indivisibles générique	124

3.3.2.5	Traduction des problèmes d’enchères combinatoires	125
3.4	Conclusion	126
4	Complexité du problème de partage	129
4.1	Existence d’une allocation efficace et sans-envie	129
4.1.1	Complexité du problème EEF avec préférences dichotomiques	129
4.1.1.1	Le problème général	129
4.1.1.2	Restrictions sur le langage	134
4.1.1.3	Critères d’efficacité alternatifs	143
4.1.2	Préférences non-dichotomiques	147
4.1.2.1	Préférences logiques générales	147
4.1.2.2	Préférences numériques sous forme logique	148
4.1.2.3	Préférences numériques additives	151
4.1.3	Conclusion	156
4.2	Maximisation de l’utilité collective	156
4.2.1	Complexité du problème général	159
4.2.2	Pas de contrainte	159
4.2.3	Contraintes de préemption uniquement	160
4.2.4	Contraintes de volume uniquement	164
4.2.5	Contraintes d’exclusion uniquement	165
4.2.6	Conclusion	166
III	Algorithmique	169
5	Préordre leximin et programmation par contraintes	171
5.1	Exposé du problème	171
5.1.1	Retour sur le préordre leximin	171
5.2	Le problème de satisfaction de contraintes à critère max-leximin	173
5.3	Programmation par contraintes et optimisation leximin	175
5.3.1	La programmation par contraintes	175
5.3.1.1	Les deux composantes d’un système de programmation par contraintes	175
5.3.1.2	Propagation de contraintes	177
5.3.1.3	Contraintes globales	179
5.3.1.4	Programmation par contraintes événementielle	179
5.3.2	La programmation par contraintes avec un critère de satisfaction	175
5.4	Algorithmes de programmation par contraintes	180
5.4.1	Le leximin comme une fonction d’utilité collective	182
5.4.2	Une contrainte <i>ad-hoc</i> pour l’ordre leximin	183
5.4.3	Algorithmes itératifs	185

5.4.3.1	Brancher sur les sous-ensembles saturés	185
5.4.3.2	Trier pour régner	188
5.4.3.3	Un nouvel algorithme utilisant une méta-contrainte de cardinalité	189
5.4.3.4	Transformations max-min	193
5.4.4	Aspects heuristiques	195
5.5	Conclusion : au-delà du leximin ?	196
5.5.1	Un leximin à seuil	197
5.5.2	Les moyennes pondérées ordonnées	198
6	Expérimentations	199
6.1	Le problème Pléiades simplifié	200
6.1.1	Description et modélisation du problème	200
6.1.2	Génération des instances	201
6.1.3	Résultats	202
6.2	Enchères combinatoires équitables	207
6.2.1	Description et modélisation du problème	207
6.2.2	Génération des instances	207
6.2.3	Résultats	209
6.3	Problème de partage de biens indivisibles générique	212
6.3.1	Description du modèle	212
6.3.2	Génération des instances	213
6.3.2.1	Instances de type générique	213
6.3.2.2	Instances de type Pléiades	213
6.3.2.3	Instances de type Spot	214
6.3.3	Résultats	215
6.4	Problème d'affectation de sujets de travaux expérimentaux	217
6.4.1	Description de l'instance réelle	217
6.4.2	Modélisation et résolution du problème	218
6.4.2.1	Formulation mathématique du problème	218
6.4.2.2	Problème de flot sous contraintes	219
6.5	Conclusion	220
	Conclusion	223
	Bibliographie	229
	Liste des figures et tableaux	243
	Liste des figures	243
	Liste des tableaux	244

Liste des symboles	246
A Classes et problèmes de complexité	249
A.1 Classes de complexité	249
A.2 Liste des problèmes introduits	252
B Représentation du préordre leximin par une fonction d'agrégation	255
B.1 Taille du domaine de la fonction d'agrégation	255
B.2 Représentation du préordre leximin	257
B.2.1 Par une moyenne pondérée ordonnée	257
B.2.2 Par une fonction somme des puissances	257
B.3 Le cas particulier de la fonction somme des puissances	258
B.3.1 Le cas critique	258
B.3.2 Calcul du q minimal	259
B.3.2.1 Tableau de variation de f	259
B.3.2.2 Une borne supérieure de q_{min}	260
B.3.2.3 Une deuxième borne supérieure de q_{min}	261
C Calcul des indices d'inégalité généralisés	263
C.1 Indices d'Atkinson généralisés	263
C.1.1 $q \neq 0$	263
C.1.2 $q = 0$	263
C.2 Indice de Gini généralisé	264
C.2.1 Première formulation	264
C.2.2 Deuxième formulation	264
C.2.3 Troisième formulation	265
Index	266

Notations

Ensembles

\mathbb{R} , \mathbb{Q} et \mathbb{N}	Ensemble des réels, des rationnels et des entiers naturels
$\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{N}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
\mathbb{R}^+ et \mathbb{Q}^+	Ensemble des réels positifs et des rationnels positifs
\mathbb{R}_* , \mathbb{Q}_* et \mathbb{N}_*	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
\mathbb{R}_*^+ et \mathbb{Q}_*^+	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$
Lettre calligraphique	Ensemble mathématique (\mathcal{X} , \mathcal{Y} , ...)
$\{\dots\}$	Ensemble mathématique
\times	Produit cartésien
\mathcal{X}^n	$\underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_{n \text{ fois}}$
$\wp(\mathcal{X})$	Ensemble des parties de \mathcal{X}
\subset , \supset	Relation d'inclusion
\subseteq , \subsetneq	Inclusion au sens large, inclusion stricte
\in	Appartenance à un ensemble
$[a, b]$	Intervalle réel fermé entre a et b
$[[n, m]]$	Intervalle entier entre n et m inclus
$ \mathcal{X} $	Cardinal de \mathcal{X}
\emptyset	Ensemble vide

Vecteurs

\vec{x}	Vecteur
(\dots)	Vecteur
x_i	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur \vec{x}
\vec{x}^\uparrow	Vecteur des composantes de \vec{x} ordonnées dans l'ordre croissant
\vec{x}_i^\uparrow	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur \vec{x}^\uparrow
\vec{x}^\downarrow	Vecteur des composantes de \vec{x} ordonnées dans l'ordre décroissant
\vec{x}_i^\downarrow	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur \vec{x}^\downarrow
\bar{x}	moyenne des composantes du vecteur \vec{x}

Raisonnement mathématique

\forall , \exists	Quantificateurs universel et existentiel non logiques
\Leftarrow , \Rightarrow	Implication non logique
\Leftrightarrow	Équivalence non logique

Relations binaires

\mathfrak{R}	Relation binaire quelconque
$x\mathfrak{R}y$	$\mathfrak{R}(x, y)$

$(\preceq, \succeq), (\leq, \geq)$	Préordres (relations binaires réflexives et transitives)
\prec, \succ	Préférence stricte : $x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } y \not\preceq x)$
\sim	Indifférence : $x \sim y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } y \preceq x)$
\perp, \top	Éléments minimum et maximum vis-à-vis d'un préordre
\max_{\succeq}	Ensemble des éléments non dominés vis-à-vis de \succeq
$[x]_{\sim}$	Classe d'équivalence de x vis-à-vis de la relation \sim
\mathcal{E}/\sim	Ensemble quotient de \mathcal{E} pour \sim
Logique et contraintes	
\mathbf{x}	Variable binaire (booléenne) ou non binaire
$\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}$	valeurs minimales et maximales du domaine de \mathbf{x}
$\underline{\mathbf{x}} \leftarrow \alpha, \bar{\mathbf{x}} \leftarrow \alpha, \mathbf{x} \leftarrow \alpha$	modifications du domaine de \mathbf{x} (dans les algorithmes)
$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$	Connecteurs logiques non, ou, et, implication, équivalence
$\mathbf{x} ? \mathbf{y}_1 : \mathbf{y}_0$	opérateur logique if-then-else
$Mod(\varphi)$	Ensemble des modèles de φ
$v \models \varphi$	$v \in Mod(\varphi)$
$MaxCons(\Delta, \beta)$	ensemble de tous les sous-ensembles maximaux β -consistants de Δ
$MaxCons(\Delta)$	$MaxCons(\Delta, \top)$
\vdash^{\forall}	Symbole de conséquence sceptique
$Inst(\mathcal{X})$	Ensemble des instanciations (ou interprétations) sur \mathcal{X}
$(\mathbf{x}_1 : v(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{x}_n : v(\mathbf{x}_n))$	Instanciation (notation explicite)
$\langle v_x, v_y \rangle$	Concaténation de deux instanciations
$(\mathbf{x}_1 : \mathcal{D}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \mathbf{x}_n : \mathcal{D}_{\mathbf{x}_n})$	Fonction de domaine (notation explicite)
$\langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \rangle$	Unification de deux fonctions de domaine
$v \downarrow_{\mathcal{S}}$	Projection d'une instanciation sur un ensemble
Fonctions, limites	
$ x $	Valeur absolue de x
$sgn(x)$	Fonction signe : $\forall x \in \mathbb{R}^*, sgn(x) = \frac{x}{ x }$
\log	Fonction logarithme népérien
Id	Fonction identité
$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$	b est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a
$x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-$	x tend vers a par valeurs positives, négatives
$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$	$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
Complexité computationnelle	
\mathcal{P}	Problème de décision quelconque.
$\text{co-}\mathcal{P}$	Complémentaire du problème \mathcal{P} .
Probabilités	
$X = (x_1, A_1; \dots; x_n, A_n)$	Variable aléatoire
$(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$	Loterie
P	Fonction de probabilité
$E(X)$	Espérance de X
Divers	
$\binom{m+n-1}{n}$	Coefficient binomial
\mathcal{G}	Graphe